Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

9 Marzo 2012

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. Il Giardino Fiorito

Il Giardino Fiorito del castello è di forma triangolare, delimitato da tre sentieri rettilinei che collegano le tre porte di accesso, una su ciascun vertice, denominate Porta Alba, Porta Bianca e Porta Chiara in onore della carnagione della principessa. Biancaneve sta passeggiando all'interno del Giardino Fiorito; si trova a metà strada sul sentiero rettilineo che collega Porta Bianca e Porta Chiara, da lì vede due guardie della Regina, una a Porta Bianca, l'altra a Porta Chiara. Per evitarle, si dirige allora verso Porta Alba, ma, quando giunge a metà strada, una guardia compare su quella porta. Spaventata, Biancaneve si ferma e non si accorge che le cade il fazzoletto. Vede che non c'è più la guardia a Porta Bianca. Si dirige perciò verso quella, ma, quando giunge a metà strada, la guardia ricompare sulla porta. Spaventata, Biancaneve si ferma e non si accorge che le cade lo scialle. Vede che non c'è più la guardia a Porta Alba. Si dirige dunque verso quella. Giunta a metà strada, si rende conto di aver perso il fazzoletto e lo scialle e li vede nei punti in cui si era fermata in precedenza. Per valutare quanto tempo impiegherà per raccoglierli, Biancaneve calcola il rapporto tra l'area del Giardino Fiorito e l'area del triangolo formato da lei, dal fazzoletto e dallo scialle. Che numero trova?

2. Il primo esercizio di Dotto

Dotto si sta esercitando con i numeri. Ha preso la funzione

$$f(n) = \frac{200 - 2n}{n}$$

e ha calcolato le ultime due cifre (cioè le due più a destra) del prodotto $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(99)$. Che cosa ha trovato?

3. La truffa sventata

L'orefice di corte ha preparato per la Regina un globo d'oro e argento che ha una massa di 300 g ed un volume di 20 cm^3. La Regina si lamenta dicendo che c'è più argento che oro. L'orefice si difende dicendo che la densità dell'oro è 19 g/cm^3, quella dell'argento è 10 g/cm^3. La Regina nota che, proprio per questo, ha ragione lei. Qual è il rapporto, moltiplicato per 1000, tra il volume di oro e quello di argento nella palla?

4. Il secondo esercizio di Dotto
Dotto continua ad esercitarsi con i numeri: ha inventato una nuova operazione tra numeri interi. Moltiplica la cifra delle unità del primo numero per la cifra delle unità del secondo numero, poi, se il risultato è maggiore di 9, ne somma le cifre, e in caso questo nuovo numero sia maggiore di 9, ne somma ancora le cifre, finché ottiene un numero con una sola cifra. Questa è la cifra delle unità del numero risultato della nuova operazione. Allo stesso modo si opera con la cifra delle decine, quella delle centinaia, e così via. Quante sono le coppie (non ordinate) di numeri che hanno come risultato 1357?

5. Il poligono di Pisolo
In un poligono regolare di 30 lati, Pisolo numera tutti i vertici da 1 a 30. Appoggia poi 15 dischi circolari di raggio uguale al lato del poligono con i centri sui vertici numerati con un numero dispari. Ogni disco ha la circonferenza lunga 20 cm. Qual è il perimetro esterno della figura?

6. Il cucciolo sgarzulino
Cucciolo chiama *sgarzulini* i numeri naturali formati solo da cifre 1. Quante cifre ha il più piccolo numero sgarzulino maggiore di 1 tale che il numero dei suoi divisori sgarzulini sia un numero sgarzulino?

7. Il terzo esercizio di Dotto
Dotto scrive la seguente operazione

$$\mathsf{Pera} + \mathsf{Pesca} = \mathsf{Frutti}$$

e spiega agli altri nani che ha sostituito a ogni cifra una lettera, a lettere diverse corrispondono cifre diverse. Una lettera all'inizio di una parola perciò non corrisponde alla cifra 0. Che cifre scrive Dotto quando scrive case?

8. La più bella del reame
L'algoritmo con cui lo Specchio Magico calcola chi sia "la più bella del reame" prescrive di inserire i 16 numeri

$$1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 100, 200, 300, 400, 600, 700, 800, 900$$

in una griglia 4×4. Oggi le somme delle 4 righe della griglia valgono (a partire dall'alto)

$$920, 1003, 1313, 874$$

mentre le somme delle 4 colonne (a partire da sinistra) sono

$$2230, 461, 109, 1310.$$

La somma dei 4 numeri che occupano la diagonale della griglia che va dalla posizione in alto a sinistra alla posizione in basso a destra determina l'identità della più bella di oggi: qual è la somma oggi?

9. La magia della Regina
Per poter eseguire un rito magico, la Regina deve trovare il numero delle quadruple (x, y, z, t) di numeri reali tali che

$$\begin{cases} x^2y^2 + z^2t^2 & = & 1 \\ x^2z^2 + t^2y^2 & = & 1 \\ x^2t^2 + y^2z^2 & = & 1 \\ xyzt & = & 0 \end{cases}$$

Quante sono?

10. La cavalcata del Principe Azzurro
Il Principe Azzurro deve raggiungere l'altro capo della Foresta con il suo cavallo ed è appena giunto ad un incrocio. Una strada passa sopra un fiume con un ponte pericolante che ha la probabilità del 30% di crollare al passaggio di un cavallo, mentre ognuna delle altre due strade passa sopra due fiumi con due ponti consecutivi, ciascuno dei quali ha la probabilità del 20% di cadere al passaggio di un cavallo. Il Principe non sa quale strada abbia un solo ponte o quale ne abbia due. Se il Principe sceglie a caso la strada, che probabilità c'è che attraversi il bosco?
Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità.

11. Il poligono di Brontolo
Brontolo disegna un poligono regolare di 21 lati. Poi traccia tutte le diagonali e conta tutti i punti, interni al poligono, che sono intersezione di tali diagonali. Quanti punti conta?

12. Il quarto esercizio di Dotto
Stavolta Dotto considera l'equazione

$$3i^2 + 2j^2 = 77 \cdot 6^{2012}$$

e determina quante soluzioni intere (i, j) essa abbia. Quante sono?

13. Gongolo platonico
Gongolo ha davanti una copia di ciascuno dei cinque solidi regolari. Guardandoli uno per uno si immagina come tracciare, in ciascuno di essi, tutti i segmenti più lunghi possibile. Quanti sono, in totale, tali segmenti?

14. I mattoncini ordinati
Eolo e Mammolo decidono di fare un gioco insieme, mettendo in ordine mattoncini quadrati, tutti delle stesse dimensioni. Eolo li impila, Mammolo fa muretti quadrati. Eolo inizia con una pila di un mattoncino, Mammolo con un quadrato di un mattoncino (la stessa cosa). Al secondo turno, Eolo fa una pila di due mattoncini, Mammolo un quadrato di quattro mattoncini. Al terzo turno, Eolo fa una pila di tre mattoncini, Mammolo un quadrato di nove mattoncini. Si rendono conto di aver ordinato 20 mattoncini. Decidono di continuare fino al turno quando avranno messo in ordine un numero di mattoncini multiplo di 2012. A quale turno si fermano?

15. Il quinto esercizio di Dotto
Dotto si esercita ancora con i numeri. Ha davanti 10 scatole, numerate da 1 a 10. Inserisce nella scatola n. 1 un numero scelto tra -1, 0, 1 e 2; analogamente, anche nella scatola n. 2 inserisce uno dei numeri -1, 0, 1, 2 ecc. fino a riempire tutte le scatole. Poi fa il prodotto dei 10 numeri così inseriti e scrive il numero ottenuto sulla lavagna. Ripete l'operazione inserendo nelle scatole di nuovo i numeri $-1, 0, 1, 2$ in un modo diverso dal precedente, e scrive il prodotto ottenuto sulla lavagna, a fianco del primo. Continua inserendo i numeri $-1, 0, 1, 2$ in tutti i modi possibili nelle dieci scatole e scrivendo via via il prodotto ottenuto a fianco degli altri. Infine calcola la somma di tutti i numeri scritti sulla lavagna. Che numero trova?

16. Le guardie accecate
In un campo quadrato di lato 200 m sono stati piantati dei pali verticali, di forma cilindrica, tutti uguali tra loro. Due qualunque di essi distano non meno di 2 m. Le tre guardie della Regina entrano nel campo e si posizionano in 3 punti distinti. Dal proprio punto di osservazione, guardando in tutte le direzioni, ciascuna delle guardie dice di vedere esattamente 3 pali, tutti gli altri restano nascosti. Quanti pali ci sono al massimo nel campo?

17. La strategia di Mammolo
Il casinò del regno ha introdotto un nuovo gioco: il giocatore lancia un classico dado a 6 facce, il banco quindi chiede al giocatore se vuole ritirare il dado, o essere pagato con una somma pari al risultato del dado, e fermarsi. Se si sceglie di ritirare il dado, il banco ripete la domanda, fino a un massimo di 6 lanci totali, quando si è costretti ad accettare il risultato del sesto lancio. Mammolo ha trovato la strategia che permette di incassare il più possibile. Qual è la vincita media della strategia trovata da Mammolo?
Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime la vincita media.

18. Le tangenti di Brontolo
Esercitandosi per il taglio dei diamanti, Brontolo disegna, su un piccolo foglio quadrato di lato 2 cm, una circonferenza tangente ai lati del foglio. Disegna poi una seconda circonferenza, esterna alla prima e tangente ad essa e a due lati del foglio; ne disegna poi una terza, esterna alle prime due, ma tangente alla seconda e a due lati del foglio, e così via. Brontolo si ferma quando disegna la prima circonferenza con raggio inferiore a un millesimo di millimetro, quante circoferenze sono disegnate sul foglio?

19. La fiaba di Biancaneve
Biancaneve racconta una nuova fiaba dell'Isola Kenoncé di cavalieri e furfanti (i cavalieri dicono sempre il vero, i furfanti sempre il falso): la fiaba del censimento statistico sull'Isola Kenoncé. Gli operatori dell'Ufficio Censimento entrano in un bar e rivolgono la stessa domanda a cinque avventori: «Quanti sono i furfanti su quest'isola?» Ricevono le seguenti risposte:

- Il loro numero diviso per 56 dà come resto 19
- Il loro numero diviso per 132 dà come resto 23
- Il loro numero diviso per 105 dà come resto 13
- Il loro numero diviso per 162 dà come resto 17
- Il loro numero diviso per 156 dà come resto 37

Il barista, un cavaliere, interviene e dice: «Gli abitanti dell'isola sono diecimila e le informazioni date dei cavalieri presenti permettono di stabilire la risposta in modo unico». Grazie al suo allenamento con i numeri, Dotto calcola quanti sono i furfanti e interrompe Biancaneve per dirlo, rovinando così la fiaba. Che numero dice Dotto?

20. Il vessillo della Regina
Il vessillo reale è un triangolo diviso in 3 triangoli di colori diversi e con 4 diamanti, uno in ciascun vertice. La Regina vuole farlo cambiare usando più triangoli; il Re acconsente, ma impone che vengano usati un numero di triangoli superiore a 3 e che siano mantenute le proprietà regali di quello originario: deve essere un triangolo diviso in a triangoli, con un diamante in ogni vertice; ogni lato deve contenere solo due diamanti (i due ai suoi vertici) e, in ciascun vertice della figura, si devono incontrare lo stesso numero di lati (il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice del vessillo originario è tre). Qual è la somma dei numeri a che la Regina può scegliere?
[**Attenzione:** la proprietà non richiede che il numero di lati che si incontrano in un medesimo vertice coincida con il numero di triangoli usati.]

21. Le letture di Biancaneve e i sette nani
Biancaneve e i sette nani sono seduti attorno ad un tavolo circolare, ed ognuno impila sul tavolo davanti a sé un certo numero di libri, tra 2 e 9 (estremi inclusi). Si accorgono che, presi comunque due di loro seduti adiacenti, il numero di libri davanti a uno dei due divide il numero di libri davanti all'altro. Dotto ha 9 libri sul tavolo davanti a sé, perciò Biancaneve, che siede al suo fianco sinistro, ha 3 oppure 9 libri davanti. In quanti modi possibili si può ottenere la distribuzione di libri sul tavolo?

22. La mela avvelenata
Per convincere Biancaneve a mangiare la mela (che appare sospetta perché perfettamente sferica dopo il bagno nella pozione magica), la strega la taglia in pezzi, in modo che ogni taglio passi per il centro. Quanti pezzi di mela, al massimo, può ottenere dopo 7 tagli?

23. La bara di Biancaneve
Per conservare il corpo morto di Biancaneve, i sette nani stanno lavorando alacremente per dividere in tre zone una grande area quadrata recintata di lato 1 km, usando soltanto tre tratti di staccionata rettilinea. Appena arrivato, il Principe Azzurro si accorge che c'è una distanza ℓ massima con la proprietà che, comunque si esegua una tale divisione (usando cioè tre tratti di staccionata di lunghezza appropriata, ma senza che uno sia sovrapposto ad un altro), in una delle tre zone ci sono due punti distanti almeno ℓ. Prima di baciare Biancaneve, il Principe Azzurro dice ai sette nani il valore di ℓ. Quanto misura, in millimetri, la differenza tra tale distanza ℓ e il lato del recinto?

24. La fine della Regina
Biancaneve, i sette nani e il Principe Azzurro lasciano che sia il caso a determinare la sorte della Regina. Prendono un cubo, marcano i tre lati del cubo che passano per lo stesso vertice A con 0, 1 e 2. Marcano poi tutti i rimanenti lati con il numero già scritto su un lato parallelo. Successivamente, inseriscono nel punto A un "segnaposto". La Regina deve lanciare un dado a 6 facce non truccato. Se il risultato del lancio del dado è n, si divide n per 3. Se il resto è 0, fa scorrere il segnaposto da A lungo il lato 0 fino a raggiungere l'altro vertice; analogamente, se il resto è 1 o 2, fa scorrere il segnaposto lungo il lato 1 o 2. Ad ogni lancio successivo del dado, si muove il segnaposto con lo stesso criterio. Se, dopo un numero totale di 10 lanci, il segnaposto si trova in A, la Regina dovrà calzare due scarpe di ferro arroventate. Qual è la probabilità che la Regina calzi le scarpe arroventate?
Si risponda con il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità.

Soluzioni per la Coppa Galileo 2012

Soluzione del problema 1. Siano A(lba), B(ianca) e C(hiara) i vertici del triangolo. Sia D il punto dove si trova inizialmente Biancaneve; siano E,F e G i tre punti dove di ferma successivamente. L'area del triangolo ABD è la metà dell'area del triangolo ABC (perché hanno la stessa base e il secondo ha altezza metà dell'altezza del primo). Analogamente l'area di ABE è la metà dell'area di ABD, l'area di AEF è la metà dell'area di ABE e infine l'area di EFG è la metà dell'area di AEF. Quindi il rapporto tra le aree è 16.
La risposta è `0016`.

Soluzione del problema 2. Si ha che $f(i) = \dfrac{2(100-i)}{i}$ e $f(100-i) = \dfrac{2i}{100-i}$, quindi $f(i) \cdot f(100-i) = 2^2$, pertanto il prodotto cercato è 2^{99}. Per calcolarne le ultime due cifre si osserva che le ultime due cifre di 2^i sono le ultime due cifre di 2^{i-1} moltiplicate per 2. In questo modo si vede che le ultime due cifre di 2^{22} sono di nuovo 04 (come le ultime due cifre di 2^2), quindi le ultime due cifre di 2^i sono le ultime due cifre di 2^{i+20}. Perciò le ultime due cifre di 2^{99} sono 88.
La risposta è `0088`.

Soluzione del problema 3. Siano M e V la massa e il volume della palla, m_e e v_e la massa e il volume, rispettivamente, dell'*e*lemento. Si ha che $V = v_o + v_a$ e $M = m_o + m_a = d_o v_o + d_a v_a$. Perciò $d_o v_o = M - d_a v_a = M - d_a(V - v_o)$, da cui $(d_o - d_a)v_o = M - d_a V$ e $(d_a - d_o)v_a = M - d_o V$. Perciò

$$\frac{v_0}{v_a} = \frac{M - d_a V}{d_o V - M} = \frac{300 - 200}{380 - 300} = 1.25.$$

Le osservazioni della Regina sono irrilevanti. Inoltre, la sua seconda argomentazione non aggiunge informazioni per la soluzione.
La risposta è `1250`.

Soluzione del problema 4. Si disegna la tabella dell'operazione (che è la moltiplicazione mod9):

op	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Si nota che è sufficiente contare quante volte la cifra richiesta appare nei risultati della tabella per sapere quante sono le coppie ordinate che producono tale cifra. Ci sono 6 casi per la cifra 1, 12 per la cifra 3, 6 per la cifra 5, 6 per la cifra 7. Quindi ci sono $6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 6$ coppie ordinate di numeri che hanno come risultato 1357. Le coppie non ordinate sono la metà, ovvero $6^4 = 1296$.
La risposta è `1296`.

Soluzione del problema 5. Sia $30 = 2n$. Sia r il raggio di ciascuna circonferenza e il lato del poligono. Il perimetro è costituito da n archi di circonferenza uguali, relativi ad un angolo α tale che $\beta = 2\pi - \alpha$ è la misura dell'angolo interno del poligono. Così $\beta = \dfrac{(2n-2)\pi}{2n}$ e $\alpha = 2\pi - \dfrac{(2n-2)\pi}{2n}$. Quindi un singolo arco misura

$$2\pi r \left(\frac{2\pi - \frac{(2n-2)\pi}{2n}}{2\pi} \right) = r \left(2\pi - \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

e l'intero perimetro vale

$$nr \left(2\pi - \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = 2n\pi r - (n-1)\pi r = \frac{n+1}{2} 2\pi r = 8 \cdot 20\,\mathrm{cm} = 160\,\mathrm{cm}$$

La risposta è `0160`.

Soluzione del problema 6. Il moltiplicatore di un sgarzulino che produce uno sgarzulino deve essere della forma $10\ldots010\ldots0\ldots10\ldots01$ dove il numero di cifre $0\ldots01$ coincide con il divisore sgarzulino. Perciò i divisori sgarzulini di uno sgarzulino sono tutti e soli i numeri il cui numero di cifre divide quello del dividendo. Il problema si riduce (sostanzialmente) a cercare il minimo numero naturale che ha 11 divisori.
La risposta è `1024`.

Soluzione del problema 7. Dato che le lettere usate sono dieci, tutte le cifre compaiono nell'operazione e a lettere uguali corrispondono cifre uguali (la condizione non è esplicitata nel testo proprio per questo). Si deduce poi che $\mathsf{F} = 1$, $\mathsf{P} = 9$, $\mathsf{r} = 0$ per gli ordini di grandezza degli addendi e della somma. Inoltre valgono le seguenti limitazioni: $\mathsf{a} = 6, 7, 8$, i è pari, $\mathsf{t} = \mathsf{c} + 1$, $\mathsf{e} = \mathsf{u} + 1$. Per $\mathsf{a} = 6$ si ha $\mathsf{i} = 2$. Restano le cifre $3, 4, 5, 7$ e 8, in cui piazzare due coppie di numeri consecutivi. Una necessariamente è $(7, 8)$ corrispondente a (c, t): se fosse $\mathsf{e} = 8$ si avrebbe $\mathsf{e} + \mathsf{s} > 9$, causando un riporto di 1 che comporterebbe $\mathsf{e} = \mathsf{u}$. Poi $\mathsf{e}+\mathsf{s} = 8$, quindi e e s valgono uno 3 e l'altro 5, sapendo che $\mathsf{e} = \mathsf{u}+1$, si ha $\mathsf{e} = 5$, $\mathsf{u} = 4$, $\mathsf{s} = 3$. Quindi $\mathsf{case} = 7635$.
La risposta è `7635`.

Soluzione del problema 8. L'unica tabella possibile è

600	20	100	200	920
700	1	2	300	1003
900	400	3	10	1313
30	40	4	800	874
2230	461	109	1310	

Per costruirla, si vede che l'unico modo per ottenere 109 sulla terza colonna con 4 dei numeri dati è $100+2+3+4$. Poiché la somma della quarta riga termina con 4, nel posto $(4,3)$ deve essere inserito il 4. Guardando l'ultima cifra delle somme della seconda e terza riga, si vede che nei posti $(2,3)$ e $(3,3)$ bisogna inserire i numeri 2 e 3 o 3 e 2. Se 3 è nel posto $(2,3)$ e 2 nel posto $(3,3)$, allora 1 è nel posto $(3,2)$ e non c'è modo di ottenere 1310 dalla somma di due numeri inseriti nelle caselle $(3,1)$ e $(3,4)$. Pertanto la tabella deve essere

-	-	100	-	920
-	1	2	-	1003
-	-	3	-	1313
-	-	4	-	874
2230	461	109	1310	

Ora si vede che nella casella $(3,4)$ c'è 10. Poiché la somma delle caselle $(3,1)$ e $(3,2)$ è 1300, si vede, sapendo che la seconda colonna dà somma 461, che nel posto $(3,2)$ c'è 400. Allora $(1,2) = 20$, $(4,2) = 40$ e $(3,1) = 900$. A questo punto la tabella si completa facilmente. Il numero richiesto è $600+1+3+800 = 1404$.
La risposta è `1404`.

Soluzione del problema 9. Dall'ultima equazione $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $z = 0$ oppure $t = 0$—ma ciascuna condizione esclude le altre. Per $x = 0$, si trova che

$$\begin{cases} z^2t^2 &= 1 \\ y^2t^2 &= 1 \end{cases}$$

Dunque $y^2 = z^2$; quindi, dalla terza delle condizioni iniziali, si trova che $z^4 = 1$. Pertanto $z^2 = 1$, quindi $z = \pm 1$. Poi $t^2 = 1/z^2 = 1$, quindi $t = \pm 1$ e $y^2 = 1/t^2 = 1$, cioè $t = \pm 1$. Allora tutte le soluzioni con $x = 0$ sono $(0, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$: sono 8. Gli altri casi sono simmetrici, cioè le rimanenti soluzioni sono $(\pm 1, 0, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1, 0, \pm 1)$ e $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0)$.
La risposta è `0032`.

Soluzione del problema 10. La probabilità che il cavaliere arrivi al termine di ciascuna strada è calcolata in tabella

	arriva	non arriva
prima strada	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$
seconda strada	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$
terza strada	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$

La probabilità di arrivare è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{25} = \frac{1}{3} \cdot \frac{35+64}{50} = \frac{33}{50}.$$

La risposta è `0033`.

Soluzione del problema 11. Presi 4 vertici del poligono, esiste un solo modo per collegarli a due a due con un segmento in modo che tali congiungenti si intersechino. Quindi 4 vertici determinano univocamente un punto d'intersezione, in terno al triangolo, di due diagonali. Il numero di punti di intersezione è quindi lo stesso dei modi di scegliere 4 punti su 21, ovvero

$$\binom{21}{4} = 5985.$$

Si noti inoltre che, poiché il numero di lati del poligono è dispari, non può accadere che tre o più diagonali si intersechino nello stesso punto.
La risposta è `5985`.

Soluzione del problema 12. Il numero i^2 deve essere divisibile per 2, mentre j^2 deve essere divisibile per 3, quindi sicuramente: $i = 2i_1$, $j = 3j_1$. Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} 12i_1^2 + 18j_1^2 &= 77 \cdot 6^{2012} \\ 2i_1^2 + 3j_1^2 &= 77 \cdot 6^{2011} \end{aligned}$$

Ripetendo questo procedimento, dopo 2011 passaggi analoghi, si deve allora risolvere l'equazione

$$2i_{2012}^2 + 3j_{2012}^2 = 77.$$

Qui le scelte sono limitate: j_{2012}^2 può valere solo $0, 1, 4, 9, 16, 25$. Le effettive soluzioni sono $(i_{2012}, j_{2012}) = (\pm 3, \pm 5)$ o $(i_{2012}, j_{2012}) = (\pm 5, \pm 1)$, in totale 8.
La risposta è `0008`.

Soluzione del problema 13. Sono $6 + 4 + 3 + 10 + 6 = 29$.
La risposta è `0029`.

Soluzione del problema 14. Il numero di mattoncini messi al turno n è $a_n = n(n+1)$. Il totale dei mattoncini ordinati fino al turno n è

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

La fattorizzazione di 2012 è

$$2 \cdot 2 \cdot 503,$$

ma $\dfrac{501 \cdot 502 \cdot 503}{3}$ ha un solo fattore 2. Si fermano perciò al turno successivo visto che (per $n = 502$) il totale

$$\frac{502 \cdot 503 \cdot 504}{3}$$

contiene sicuramente due fattori 2.
La risposta è `0502`.

Soluzione del problema 15. Fare la somma di tutti i prodotti possibili a dieci fattori presi tra -1, 0, 1 e 2 produce

$$(-1+0+1+2) \cdot (-1+0+1+2) \ldots \cdot (-1+0+1+2) = (-1+0+1+2)^{10}.$$

La risposta è `1024`.

Soluzione del problema 16. Se alcuni pali sono allineati e un osservatore è posto sulla stessa retta congiungente i pali, allora egli ne vede 2 o 1 a seconda che sia in mezzo ai pali, o oltre uno dei due estremi del segmento che li unisce. La configurazione con il massimo numero di pali è dunque quella in cui quanti più possibili pali sono su una diagonale d del quadrato e il numero massimo è

$$\left[\frac{200 \cdot \sqrt{2}}{2}\right] + 1 = 142$$

e due ulteriori pali sono piantati da una stessa parte della diagonale. I pali sulla diagonale possono essere disposti in modo che non vadano ad occupare i vertici del quadrato. Se A è nel primo estemo di d, B è nel secondo estremo e C è nel punto di intersezione di d con la retta congiungente i 2 rimanenti pali, sia A, sia B, sia C vedono 3 pali. Il numero totale dei pali nel campo è al massimo 144.
La risposta è `0144`.

Soluzione del problema 17. Si consideri l'ultimo lancio, la vincita attesa è di

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Quindi, se si arriva al quinto lancio, la scelta corretta è accettare 4, 5 e 6 in quanto superiori alla media del sesto lancio, e rifiutare 1, 2, 3.
La vincita attesa al quinto lancio è

$$4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{7}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{17}{4} = 4.25$$

Al quarto lancio si accettano 5, 6 rifiutando gli altri, la vincita attesa è:

$$5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{17}{4} \times \frac{4}{6} = \frac{14}{3} \approx 4.67$$

così al terzo lancio

$$5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{14}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{89}{18} \approx 4.94$$

al secondo lancio

$$5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{89}{18} \times \frac{4}{6} = \frac{277}{54} \approx 5.12$$

Al primo lancio si accetta solo 6, quindi:

$$6 \times \frac{1}{6} + \frac{277}{54} \times \frac{5}{6} = \frac{1709}{324}$$

1709 è primo ed è la soluzione.
La risposta è `1709`.

Soluzione del problema 18. Sia r il raggio della k-esima circonferenza e sia r' il raggio della $(k+1)$-esima circonferenza. Si trova che

$$r + r' + \sqrt{2}r' = \sqrt{2}r,$$

cioè $r' = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) r$. Perciò il raggio della k-esima circonferenza in millimetri misura $10\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{k-1} \approx 0.1716^{k-1} \times 10$. Per trovare qual è il primo numero nella succesione che è inferiore a un millesimo di millimetro, si calcola che $0.17^5 \times 10^4 \approx 1.4$ e $0.18^6 \times 10^4 \approx 0.34$. Dato che $0.17 < 3 - 2\sqrt{2} < 0.18$, le circonferenze sono 7.
La risposta è `0007`.

Soluzione del problema 19. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 19 \bmod 56 \\ x = 23 \bmod 132 \\ x = 13 \bmod 105 \\ x = 17 \bmod 162 \\ x = 38 \bmod 156 \end{cases}$$

in cui qualche equazione è errata.
Grazie al Teorema Cinese dei Resti, esistono soluzioni in un sistema

$$\begin{cases} x = a_1 \bmod n_1 \\ \vdots \\ x = a_\ell \bmod n_\ell \end{cases}$$

come quello sopra se e solo se

$$a_i = a_j \bmod(\gcd(n_i, n_j)) \quad i, j = 1, \ldots, \ell.$$

Si osservi che la terza e la quinta equazione non sono compatibili con nessuna delle altre, quindi risultano essere false grazie all'affermazione del barista. Inoltre, un sistema di sole 2 delle 3 rimanenti equazioni ha soluzioni multiple tra 0 e 10000.
Si consideri ora

$$\begin{cases} x = 19 \bmod 56 \\ x = 23 \bmod 132 \end{cases}$$

e lo si risolva: per trovare k, h numeri interi tali che $56k + 19 = 132h + 23$, si nota che quella condizione è equivalente a $14k - 33h = 1$ e che $-7 \cdot 14 - 3 \cdot 33 = -98 + 99 = 1$, cioè si possono prendere $k = -7$ e $h = -3$. Quindi sostituendo

$$x = -7 \cdot 56 + 19 = 1475$$

Si noti ora che x soddisfa anche la quarta equazione. Inoltre tutte le altre soluzioni sono congrue a $1475 \bmod(\mathrm{lcm}(56, 132, 162))$ e $\mathrm{lcm}(56, 132, 162) = 49896$.
La soluzione è quindi 1475.
La risposta è `1475`.

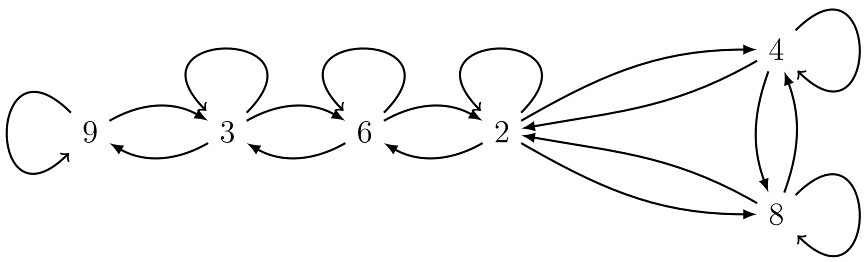
Soluzione del problema 20. Sia n il numero di lati che si incontrano nello stesso vertice in una divisione con a triangoli. Le facce di questa suddivisione

sono $a + 1$ (conviene contare anche la zona esterna del triangolo come una faccia: se si preferisce, si può immaginare il triangolo disegnato su una sfera). I lati sono $\dfrac{3(a+1)}{2}$ dato che ogni faccia ne ha 3, ma ogni lato compare in 2 facce (contando anche quella esterna). I vertici sono $\dfrac{3(a+1)}{n}$ dato che ogni faccia ne ha 3, ma ogni vertice è contato n volte.
La formula di Eulero assicura che

$$\frac{3(a+1)}{n} - \frac{3(a+1)}{2} + (a+1) = 2.$$

Dunque 2 divide $3(a+1)$ (come pure n), perciò a deve essere dispari. In più, $6(a+1) = n(a+5)$ cosicchè $a+5|24$. I casi possibili sono $a = 0, 1, 3, 7, 19$. Gli unici accettabili dalle richieste del problema sono gli ultimi due. Nel caso di 7 triangoli, in ognuno dei 6 vertici si incontrano 4 lati. Nel caso di 19 triangoli, in ognuno dei 12 vertici si incontrano 5 lati.
Il problema si può anche risolvere vedendo il triangolo su una sfera e deformando il solido ad un poliedro regolare—si esclude il caso degenere $a = 0$, irrilevante per il problema.
La risposta è `0026`.

Soluzione del problema 21. Il problema richiede di trovare il numero di percorsi con otto archi nel grafo



che partono e arrivano in 9. Per contarli, conviene spezzare il percorso a metà con due cammini, ciascuno da quattro archi: $9 \to n \to 9$. Perciò la soluzione sarà la somma $\sum_{n=2,3,4,6,8,9} p(9,n)^2$ dei quadrati dei numeri di percorsi $p(9,n)$ di quattro archi da 9 a n nel grafo sopra. Infine, per contare ciascun $p(9,n)$ conviene notare che il primo arco deve essere uno tra i due $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 9 \\ 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 3 \end{tikzcd}$ mentre gli ultimi archi saranno

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] 2 \arrow[ddr] & \\ 4 \arrow[dr] & \\ 6 \arrow[r] & 2 \\ 8 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 3 \arrow[dr] & \\ 6 \arrow[r] & 3 \\ 9 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 2 \arrow[dr] & \\ 4 \arrow[r] & 4 \\ 8 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 2 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[r] & 6 \\ 6 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 2 \arrow[dr] & \\ 4 \arrow[r] & 8 \\ 8 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 9 \arrow[dr] & \\ & 9 \\ 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Basta ora contare in quanti cammini di due archi si possono collegare i primi archi con gli ultimi. Si trova la seguente tabella

nodo di partenza	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9
numero di cammini	1	0	3	2	0	0	2	1	0	0	2	2
nodo di arrivo	2	2	3	3	4	4	6	6	8	8	9	9

Si trova così che

n	2	3	4	6	8	9
$p(9,n)$	4	12	1	9	1	9

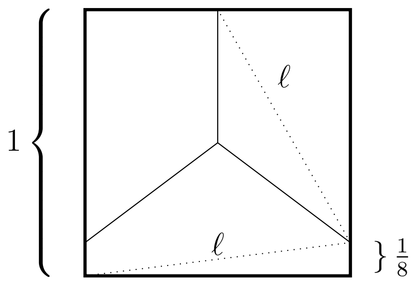
Perciò la somma richiesta è $4^2 + 12^2 + 1^2 + 9^2 + 1^2 + 9^2 = 324$.
La risposta è `0324`.

Soluzione del problema 22. Eseguito il primo taglio, la sfera risulta tagliata in due parti uguali; d'ora in avanti si consideri una sola delle 2 emisfere per calcolare in quante parti può venire, al massimo, tagliata. Infine, data la simmetria centrale dei tagli, si otterrà il risultato finale raddoppiando il numero di tali parti.
Appoggiata l'emisfera sul suo cerchio di base, dall'alto un taglio sull'emisfera appare come una curva (mezzo ellisse, per l'esattezza), contenuta nel cerchio e che unisce due punti diametralmente opposti. Si noti che due di queste curve hanno al massimo un punto di intersezione. E' chiaro che con un taglio appropriato si intersecano tutti gli altri tagli già eseguiti. Visti dall'alto, l'arco di ellisse relativo a tale taglio interseca tutti quelli già fatti in punti differenti. A esempio, si eseguono tutti i tagli lungo un piano fissato, non perpendicolare al piano di base della emisfera; dopo il primo taglio, si ruota la emisfera di $\frac{\pi}{2}$ e si esegue il seondo taglio, poi di $\frac{\pi}{4}$ e via di questo passo. Per contare le parti in cui dividiamo l'emisfera, all'i-esimo taglio appropriato, si generano altre i parti (una più una per ogni taglio che si incontra, che sono $i-1$); ad ogni taglio aggiungeremo una parte in più rispetto a quelle aggiunte al taglio precedente. Dopo m tagli avremo quindi diviso l'emisfera in

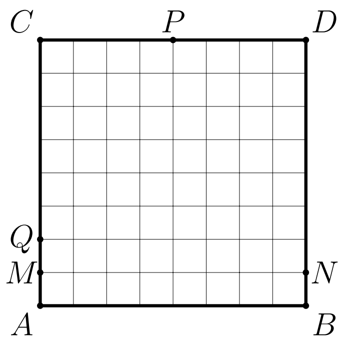
$$1 + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Tornando alla sfera (e ricordando che il k-esimo taglio sull'emisfera, corrisponde al $(k+1)$-esimo taglio sulla sfera), il numero di parti in cui viene divisa la sfera, dopo n tagli (con $n > 0$) è dato dalla formula $2\left(1 + \frac{(n-1)n}{2}\right) = n^2 - n + 2$.
La risposta è `0044`.

Soluzione del problema 23. Il valore cercato è $\ell = \sqrt{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 1,00778221\,\mathrm{km}$. La divisione in cui ℓ non è migliorabile è la seguente

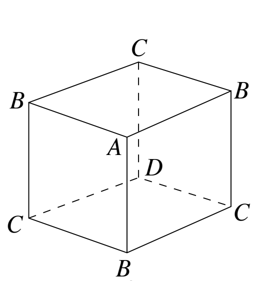


Si vede poi che in qualunque suddivisione ℓ è ottenibile considerando che in una zona ci sono due vertici, diciamo A e B sulla base inferiore. Si considerino tre punti: M a $\frac{1}{8}$ da A su AC, N a $\frac{1}{8}$ da B su BD e il punto medio P di CD.



Se uno dei tre punti è nella stessa zona di A e B, si conclude. Altrimenti due di quei punti sono nella stessa zona.
Se uno di questi è P si conclude facilmente; se invece questi sono M e N, si considerano due ulteriori punti D e Q a $\frac{1}{4}$ da A. In una delle tre zone stanno A e B, in un'altra M e N, nell'altra ancora P. Se Q sta in quella con M, si considera QN che è lungo ℓ. Se D sta in quella con M, si considera QM che è più lungo di ℓ. Altrimenti, Q e D stanno nella zona con P e sono distanti più di ℓ.
La risposta è 7782.

Soluzione del problema 24. Si indichino con B i 3 vertici del cubo che sono estremi di lati che hanno il secondo estremo in A, con D il vertice del cubo opposto ad A e con C i 3 vertici rimanenti. Sia A_i (risp. B_i, C_i) la probabilità di avere il segnaposto in A (risp. in B, in C) dopo i lanci del dado. Se, dopo un certo lancio, il segnaposto è in B, la probabilità che al lancio successivo finisca in A è di $\frac{1}{3}$ (e la probabilità che finisca



in C è di $\frac{2}{3}$). Se il segnaposto non è in B, la probabilità che al lancio successivo finisca in A è chiaramente 0. Pertanto: $A_n = \dfrac{B_{n-1}}{3}$. Per calcolare B_n, si osservi che, con un lancio, si arriva in B da C con probabilità $\frac{2}{3}$ e da A, con probabilità

1. Pertanto $B_n = \dfrac{2C_{n-1}}{3} + A_{n-1}$. Infine si osservi che, al lancio n, il segnaposto può essere su uno dei due vertici A o C (se n è pari), oppure su uno dei 2 vertici B o D (se n è dispari). Pertanto, se n è pari, $A_n + C_n = 1$. Mettendo assieme queste osservazioni, si trova che, se $n = 2m$ è pari,

$$A_{2m} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}C_{2m-2} + A_{2m-2}\right) \qquad \text{e} \qquad C_{2m-2} = 1 - A_{2m-2}$$

da cui

$$A_{2m} = \frac{A_{2m-2} + 2}{9}.$$

Dato che $A_0 = 1$ perché, allo 0-esimo lancio, il segnaposto è in A, si trova che $A_{10} = \dfrac{4921}{3^9}$. La risposta è 4921.
La risposta è `4921`.